# Понижение порядка некоторых типов ДУ высших порядков.

(ДУ не содержит )

Замена

Получаем для ДУ 1-го порядка:

Находим . Тогда

*Пример.*

Замена

Получаем для ДУ 1-го порядка:

*Замечание.*

ДУ , сводится к ДУ

(ДУ не содержит явно )

Замена . Подставим в ДУ:

ДУ 1-го порядка относительно . Решая его, получаем общее решение

.

с разделяющимися переменными

=dx

*Пример*.

.

Замена . Подставим в ДУ:

# Линейные ДУ (ЛДУ) n-го порядка: однородные (ЛОДУ) и неоднородные (ЛНДУ). Теорема существования и единственности решения. Линейный дифференциальный оператор. Свойства линейного дифференциального оператора и линейность пространства решений ЛОДУ.

ЛДУ n-го порядка (неоднородное):

Коэффициенты и правая часть – функции, непрерывные на или на . Для . Разделим на . Получим ДУ вида

(2.6.1)– ЛНДУ го порядка. Соответствующее ЛОДУ:

***Задача Коши для ДУ***: найти частные решения, удовлетворяющие начальным условиям:

где .

***Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ЛДУ го порядка***

Пусть непрерывны на . Тогда для точки и решение задачи Коши (2.6.1),(2.6.2), причем оно определено на всем интервале .

Рассмотрим левую часть ЛДУ (2.6.1) и (2.6.10) – дифференциальный оператор

.

Покажем, что является линейным оператором, т.е. и , где .

,

Таким образом, – ***линейный дифференциальный оператор.***

Операторная форма ЛДУ:

ЛНДУ:

ЛОДУ:

***Линейные однородные ДУ (ЛОДУ) n-го порядка.***

***Теорема.*** Множество частных решений ЛОДУ n-го порядка является линейным пространством относительно операций сложения функций и умножения на число.

***Док-во.*** Нужно доказать, что операции сложения частных решений и умножения частных решений на число не выводит из множества частных решений, т.е. сумма частных решений – также решение, произведение частного решения на число – также решение, .

Пусть – решения, тогда , т.е. – решение, , т.е. – также решение. Нулевым вектором в линейном пространстве решений ЛОДУ является функция .

Итак, решения ЛОДУ n-го порядка образуют линейное пространство.

# Линейная зависимость функций. Определитель Вронского (вронскиан). Теорема о вронскиане системы линейно зависимых функций и о вронскиане системы линейно независимых частных решений ЛОДУ.

***Опр.*** Функции называются линейно зависимыми на , если , не все равные , такие, что

***Опр.*** Если выполнение равенства () на всем интервале возможно только при , то функции называются линейно независимыми на .

***Критерий линейной зависимости***:

Функции линейно зависимы на для некоторого k=1,….n (т.е. хотя бы одна из функций линейно выражается через остальные).

*Пример*.

Т.к. , то функции линейно зависимы на

Пусть функции раз дифференцируемы на .

***Опр. Определителем Вронского*** (вронскианом) системы функций называется определитель

.



***Теорема о вронскиане системы линейно зависимых функций***

Пусть функции линейно зависимы на . Тогда :

***Док-во***: по определению линейной зависимости функций , не все равные , такие, что . Последовательно продифференцируем это равенство:

Зафиксируем

(2.7.2) – СЛАУ (однородных) относительно , которая имеет ненулевое решение, т.е. определитель системы равен , т.е. ().

*Замечание.* Обратное неверно, т.е. если , то функции могут быть линейно независимы.

*Пример*.

,

.

Т.е. на , но и линейно независимы, т.к. . Не существует , таких, что для всех .